

基于自适应遗传算法的点云曲线重建

成媛媛 满家巨 全惠云

(湖南师范大学数学与计算机科学学院,长沙 410081)

摘要 由于用无序离散点集来重建出曲线曲面模型,在反求工程与计算机视觉中都有着广泛的应用,为此根据实际采样中离散点分布相对集中的特点,提出了一个基于自适应遗传算法的多维无序点集曲线重建算法。该算法针对无序带噪声的空间曲线重建问题,先把点云分布空间网格化,然后在每个网格中用自适应遗传算法搜索出最能代表该网格中点集的特征点,由于每个网格区域中点集分布的不均匀性,因此可根据搜索出来的特征点,利用改进的自适应的 SIG(sphere-of-influence graph)图来对每个特征点进行进一步调整,以便能使得待重建曲线的型值点,最后利用测地距离函数来确定型值点的拓扑结构,并利用 B 样条函数来重建曲线。实例证明,无论是 2 维平面点云还是 3 维空间点云,该点云重建方法简单可行,特别是对于存在自交情况以及点云具有明显角点的情况亦可以获得满意的结果。

关键词 无序点集 曲线重建 自适应遗传算法 SIG 图

中图法分类号: TP391.41 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2006)09-1293-06

Curve Reconstruction from Points Cloud Based on Adaptive Genetic Algorithm

CHENG Yuan-yuan, MAN Jia-ju, QUAN Hui-yun

(Mathematics and Computer Science College, Hunan Normal University, Changsha 410081)

Abstract Curve reconstruction from a set of unorganized points plays an important role in the fields of reverse engineering and computer vision. In this paper, an adaptive genetic algorithm is presented for curve reconstruction based on the regular distribution property of the point set. In this paper, the algorithm divides the region of point set into many grids and in each grid the algorithm elects a point by the adaptive genetic algorithm. Because of the asymmetry of the data points in each grid, here the sphere-of-influence graph(SIG) with several extensions was investigated, which provides a natural notion of proximity in our context, to adjust each data point which have been elected. This paper make these adjusted data points in order, then can reconstruct the curve using B-spline curve based on these ordered data points. The algorithm presented is feasible and simple, specially not only in two-dimensional situations but also in three-dimensional situations. As to the self-intersect point set and the point set having corner point it can also work out a satisfied result.

Keywords unorganized points, curve reconstruction, adaptive genetic algorithm, sphere-of-influence graph(SIG)

1 引言

众所周知,曲线重建问题在反求工程和计算机视觉中都有着广泛的应用。其中,反求工程(reverse engineering)的一个重要任务就是由物理模型重建

出几何表示模型,这其中包括数据采集、预处理、曲面拟合和建立 CAD 模型 4 个步骤^[1],其核心问题是如何从采样点集出发来重建出曲线、曲面的模型。在计算机视觉中,通常要考察如何利用从图像或扫描获得的离散数据点来重建几何模型,以利于形状分析和识别^[2]。上述二者都要求由已知的无序、带

基金项目:湖南省教育厅青年项目(04B037)

收稿日期:2005-07-21 改回日期:2006-03-02

第一作者简介:成媛媛(1981~),女,2003年获湖南师范大学信息与计算科学专业学士学位,现为湖南师范大学计算机软件与理论硕士研究生。主要研究方向为智能计算、演化算法、计算机图形学等。E-mail:ccyyuaanoo@163.com。通讯作者:满家巨,E-mail:manjiajuen@yahoo.com.cn

噪音的采样点集,通过拟合出一条或多条曲线来反映出该点集的形状和走向。

曲线拟合在逼近论和几何造型中都是一个重要的研究课题。随着 3 维扫描技术的成熟,点云问题成为了一个倍受关注的热门问题,其中不但有序散乱点曲线重建已经有了许多成熟的方法^[3-5],而且对无序数据点的曲线重建,近年来也已逐步受到人们的重视。到目前为止,现有的工作大致可分为以下 3 类:第 1 类方法采用回归或最小二乘拟合的方法,如 Levin, Lee 等人利用 moving least-square 方法通过对原始点集进行两次局部最小二乘回归和细化点云来重建出曲线^[6-8],但这种方法的最大缺点是所需计算量太大;第 2 类方法是主要采用图像细化的方法来实现曲线重建,如 Pottmann 等人通过将原始的数据点集投影到平面网格上来生成二值图像, Goshtasby 则先由离散点构造势函数,并生成灰度图像,最后利用图像细化算法来得到重建曲线^[9,10],但用该方法获得的重建曲线不仅不能很好地反映点云端点的形状,并且重建曲线的准确性,甚至正确性都会受到网格分辨率的影响;第 3 类方法是由相应的曲线模型出发,直接进行重建,如 Fang, Taubin 等人分别利用弹力模型与隐式曲线模型,把已知数据点作为约束条件,通过直接求解曲线参数来得到重建曲线^[11,12]。由于这种方法常需要优化或迭代求解,因此,对于噪音过多的数据点集,该方法也不够理想。Nina Amenta 及 Marshall Bern 等人提出的重建平滑曲线的 Crust 方法,虽然能很好地重建出平滑曲线,但这种方法要求曲线形状上没有角点、分支和没有自交的情况。Edelsbrunner 和 Mcke 在 1994 年提出的 α -shape 算法是一种分段线性重建算法,且该方法仅仅是针对无噪声采样点。近年来,也有学者提出进行平面无序点集曲线重建的跟踪算法^[13]以及基于场表示的平面无序点集曲线的重建算法^[14],其虽能够在某些方面克服前 3 类方法的弊端,但是文献 [13] 仅针对简单光滑曲线的重建问题,而对于存在自交的情况以及点云具有明显角点的情况还不能很好地解决,而文献 [14] 当点云较为复杂时,则存在如何根据点云的自身性质自适应地选择一个合适的初始曲线和加速迭代速度等较难克服的问题。

针对以上当前研究中存在的问题,本文提出了一种基于自适应遗传算法的无序点云的曲线重构算法。该算法根据无序点云的分布特点和待重建曲线的光滑、光顺假设条件,并模仿连续曲线的采样与逼

近过程,首先把点云分布空间网格化,并在每个网格中搜索出最能代表该网格中点集的特征点;然后利用改进的自适应 SIG (sphere-of-influence graph) 图,通过对每个特征点进行进一步调整来得到待重建曲线的型值点;最后利用测地距离函数 d_{geo} 来确定型值点的拓扑结构,再利用 B 样条函数来重建光滑曲线。大量实例证明,本文提出的方法简单可行,特别是对于存在自交的情况以及点云具有明显角点的情况亦可以获得满意的曲线重建结果,并且算法的时间、空间复杂度均较小。

由于在反求工程与计算机视觉中,大量数据是从连续和光滑的物体上采样得到的,因此,本文中考虑无序数据点集是从一条光滑的空间曲线(允许曲线存在自交的情况以及点云具有明确角点的情况)上采样得到,并进行曲线重建的情形。由于采样、测量误差等原因,点云存在噪声。本文给出一个简单、有效的对噪声不敏感的曲线进行重建的算法。

2 曲线重建算法

2.1 相关定义

数据点集 $S = \{V_i(x_i, y_i)\}_{i=1}^{N-1}$ 为已知平面上的一组离散的带误差的无序采样数据点。

点的邻域 p 为点集 S 中的任意一点,定义点 p 的 ρ -邻域为

$$M_\rho(p) = \{q \mid d(p, q) < \rho, q \in \mathbf{R}^2\} \quad (1)$$

点集的邻域:点集 S 的 ρ -邻域定义为

$$N(S) = \bigcup_{p \in S} M_\rho(p)$$

采样密度 S 为一组采样数据点,若存在一个最小的正数 ρ ,而且 S 中任意一点的 ρ -邻域内都含有 S 中的其他数据点,则称 S 的采样密度为 ρ 。

ρ -道路连通: A, B 为点集 S 中的任意两点,如果 S 中的一组点列 $\{p_0, p_1, \dots, p_n\}$ 满足 $d(p_i, p_{i+1}) < \rho$, ($i=0, \dots, n-1$),且 $p_0 = A, p_n = B$,则称 A, B 两点为 ρ -道路连通。若点集 S 中任意两点都是 ρ -道路连通的,则称点集 S 为 ρ -连通的。

ρ -连通子集 p 为点集 S 中的任意一点,称 S 中的包含 p 点的 ρ -连通子集 $\Sigma = \{q \mid p, q \text{ 两点 } \rho\text{-道路连通}, q \in S\}$ 为 ρ -连通分支。可知,当 S 中只有一个 ρ -连通子集时,则 S 是 ρ -连通的。

根据上述定义,可以得到点集 S 具有如下性质。

性质 1 若点集 S 是 ρ -连通的,则它的 ρ -邻域

是一个连通区域。

2.2 点云分块

点云分块时,首先对已知点云所在区域进行网格划分,其网格划分在每个方向的最大跨度为 d ,然后对每个小网格区域进行有效性检查,如网格区域内存在的采样点的个数超过某一阈值(由采样精度和曲线拟合的精度要求确定),则认为该网格区域为有效区域,并将所有有效区域的集合记为 Ω 。

2.3 曲线型值点确定

曲线型值点的确定就是在每个有效区域中,首先利用自适应遗传算法搜索出最能代表该区域的特征值,算法所用的关键参数如下:

(1) 适应度函数 $f(O)$ 动态确定

$$f(O) = \begin{cases} O_{\text{worst}} + (\omega_1 \times O_{\text{best}} - O_{\text{worst}}) \times \frac{f(O) - O_{\text{worst}}}{O_{\text{best}} - O_{\text{worst}}} & f(O) > K_1 \times \bar{O} \\ O_{\text{worst}} + (\omega_2 \times O_{\text{best}} - O_{\text{worst}}) \times \frac{f(O) - O_{\text{worst}}}{O_{\text{best}} - O_{\text{worst}}} & f(O) < K_2 \times \bar{O} \end{cases} \quad (2)$$

上式中 K_1, K_2 为常数, $\frac{1}{2} \leq \omega_1 \leq 1, 1 \leq \omega_2 \leq \frac{3}{2}$, ω_1, ω_2 均可以在算法执行过程中动态调节。 $\bar{O}, O_{\text{best}}, O_{\text{worst}}$ 分别为群体中个体的平均,最好和最差的适应值。

在进化初期,采用较小的 K_1 和 K_2 值,较小的 ω_1 值和较大的 ω_2 值,能在一定程度上延缓个体的死亡,以保证群体个体的多样性和抑制局部最优解的出现;在进化后期,采用较大的 K_1 和 K_2 值,较大的 ω_1 值和较小的 ω_2 值,这样才能够使适应度高的个体占绝对优势,以便使算法能尽快收敛到全局最优解。

(2) 交叉概率和变异概率动态确定

交叉概率 $P_c = K_2 / (n^{\text{rand}(1/L, 1/M)})$ 。

变异概率 $P_m = K_1 / (n^{(1/L)})$ 。

其中 K_1, K_2 为常数,其由实验动态确定。 n 为进化代数, L 为染色体的长度, M 为每代群体的规模。 P_c, P_m 值随着进化代数可随机进行自适应更新,总体来说 P_c, P_m 在进化初期较大,随着进化发展, P_c, P_m 值逐渐变小。这完全符合进化发展规律。

定义

$$P_m^{(n)}(i, j) = P_m^{(i, j)} (1 - P_m)^{L - \alpha(i, j)} \quad E = \{0, 1\}^L \quad (3)$$

其中 $\alpha(i, j) = \{k | i_k \neq j_k, 1 \leq k \leq L\}$ 表示的是个体 i 和 j 之间的 Hamming 距离, n 为进化代数, $P_m^{(n)}(i, j)$ 表示由种群 $X^{(n)}$ 到种群 $Y^{(n)}$ 的转移概率,即

$$P_m^{(n)}(i, j) = P\{Y^{(n)} = j | X^{(n)} = i\} \quad (4)$$

$$b_n = \max\{P_m^{(n)}(i, j) | i \neq j, i, j \in E\} = (n^{-1/L} (1 - n^{-1/L})^{L-1})^M \quad (5)$$

$$d_n = \min\{P_m^{(n)}(i, j) | i \neq j, i, j \in E\} = (n^{-1/L})^L (1 - n^{-1/L})^0 \quad (6)$$

显然,只要满足 $M \geq 2 \times L + 1$, 则有

$$\textcircled{1} \sum_{n=1}^{\infty} [(b_n)^M] < \infty,$$

$$\textcircled{2} \sum_{n=1}^{\infty} d_n = \infty$$

根据参考文献 [15][16] 能够从理论上保证对于仅带选择(杰出者选择以及最佳值选择)和变异的遗传算法几乎必然能收敛到全局最优解。

(3) 搜索区间的动态自适应确定

在自适应遗传算法进化过程中,首先自适应地根据在上个世纪(若干年代的总和)中产生的最优解 O_{best} 将搜索区间划分成 $[down, O_{\text{best}}]$ 和 $[O_{\text{best}}, up]$ 两个区间,然后分别在这两个小区间中进一步搜索,如果在某个小区间中经过若干世纪进化未搜索到比 O_{best} 更优的染色体,则将该区间舍去,如果在某个区间中经过若干世纪的进化,已搜索出比 O_{best} 更好的染色体 \hat{O}_{best} , 则使 \hat{O}_{best} 成为新的区间分界点,将其所在的原区间进一步分为两个更小的区间,这样不断在各个新的小搜索区间递归地调用动态自适应的遗传算法,直至达到精度要求或小区间宽度为零为止。这种方法能够保证在有限步内进行很有效的判断并搜索到最优解(有解存在的情况),其不但对 $f(O)$ 本身性质不作任何要求(如不要求 $f(O)$ 连续),也无须考虑奇点存在的情况,而且在初始区间有多个解存在的情况下也能有效地同时搜索到各个解。

对于 2.2 节中的每个网格区域,可用上述提出的自适应遗传算法找到一个点 \hat{p}_i , 使得 \hat{p}_i 是该区域内到各个点的距离最近的点。在利用自适应遗传算法搜索 \hat{p}_i 点时的关键参数设计如下:

(1) 适应值函数:

$$f(O) = \sum_{i=1}^n ((x - x(i))^2 + (y - y(i))^2 + (z - z(i))^2) \quad (7)$$

(2) 编码方案:首先计算出每个区域内点集中各点坐标的最大、最小值为 $x_{\text{max}}, x_{\text{min}}, y_{\text{max}}, y_{\text{min}}, z_{\text{max}}, z_{\text{min}}$, 然后以这 6 个值作为边界值并将用其确定的立方体作为问题解的取值范围。为了提高解的精度和减少计算的复杂性,本文采用实数编码方法。

2.4 后处理与曲线光顺性

由于点云数据局部分布的不均匀性与网格大小的一致性,从而造成曲线在局部贴近点云边缘处,某个局部的曲线形状失真。因此,需对型值点作如下

调整:

首先要确定以型值点 \hat{p}_i 为中心的一个调整区域 $M_i(\hat{p}_i)$ 。在这里本文引入了改进的 SIG 图(图 1)。



图 1 改进的各向异性 SIG 图

Fig. 1 Anisotropic SIG to adapt the "spheres"-of-influence

改进的 SIG 图形成过程如下:

(1)以原型值点 \hat{p}_i 为中心,找到点云中与 \hat{p}_i 最邻近的 k 个点(初始时 k 值一般较小,大约为 3 或者 4),把这 k 个点组成的点集记为 U_1 。

(2)算出 U_1 所在区域的轴,以便得到包含 U_1 的最小的椭球体的轴长。

(3)按一定比例使椭球体膨胀,直到椭球体中多包含一个或 \hat{k} 个 S 中的点(\hat{k} 是根据采样密度确定的一个固定值),以便得到新的点集 U_2 ,再转到第(2)步,重复操作。

(4)终止条件为椭球体中包含 N 个点(N 大小由采样密度与拟合精度确定,在本文的实验中 $N=20$)。

引入这种改进的 SIG 图的优点在于:在一些点云分布较稀疏的区域,改进的 SIG 图可以选取较大范围的椭球体,而在点云分布较紧密的区域则可以动态地选取较小的椭球体。因此,本文的算法就能很好地解决点云出现明显尖点的情况。

在最后得到的椭球体中,再次采用本文第 3 节中的自适应遗传算法来搜索其中一点 p_i 代替 \hat{p}_i 。

2.5 型值点拓扑结构的确定

由于本文研究的对象是完全无序的点云,且点与点之间没有任何拓扑结构,因此上述步骤确定的型值点也是完全没有任何顺序的,而传统的曲线拟合方法(如 B 样条曲线拟合与 Bezier 曲线拟合方法)则均是针对已经确定好拟合先后次序的型值点进行拟合的。

由于采样的对象是一条光滑的曲线,所以原曲线应具有连续性,为此,本文通过引入一种新定义的距离公式作为评判依据来确定型值点之间的拓扑结构。

新定义的距离公式^[17]为

$$d_{geo} = (1 - \alpha) (\alpha d(\hat{p}_1, p) + \|\hat{p} - \hat{p}_1\|) + \alpha (\alpha d(\hat{p}_2 - \hat{p}) + \|\hat{p} - \hat{p}_2\|) \quad (8)$$

其中,参数 $\alpha = \|\hat{p} - \hat{p}_1\|$ 。

x 是给出的一个固定点,首先在数据点集 S 中找到与 x 距离最近的点 \hat{p}_1 ,然后,在与 \hat{p}_1 邻近的点与 \hat{p}_1 的连线上找到一个点 \hat{p} ,使得 \hat{p} 是所有连线上与 x 距离最近的点,而 \hat{p}_2 则是 \hat{p} 所在连线的另一个端点(如图 2 所示)。 $d(\hat{p}, p)$ 是所有点集 S 的连通图中 \hat{p}_1 到 \hat{p} 的最短距离。由于随着 $d_{geo}(x, p)$ 中 p 点相对于 x 的位置不断变化,所以加入一个权函数,可使得新的距离公式能自适应地调整。

步骤如下:

(1)先从搜索出的型值点集 $\{p_i (i = 1, 2, 3, \dots)\}$ 中任意选取出一一点作为初始点(当前点) $q_1^{(1)} = (x_1, y_1)$,再根据上述新的距离公式 d_{geo} 在 $\{p_i (i = 1, 2, 3, \dots)\}$ 中找到与 $q_1^{(1)}$ 距离最近的点 $q_1^{(2)}$,同时用 $q_1^{(2)}$ 代替 $q_1^{(1)}$ 作为当前点,重复操作,直至 $\{p_i\}$ 中找不到与当前点距离小于 $2d$ 的型值点;

(2)因为本文算法考虑的是允许出现自交情况以及具有明显角点的点云情况,并且初始点 $q_1^{(1)}$ 是任意选取的,所以进行上述步骤(1)时, $\{q_i^{(i)} | i = 1, 2, 3, \dots\}$ 中可能并没有包含全部 $\{p_i\}$ 中的型值点,也就未能达到对所有型值点进行排序的目的,其解决方法如下:

判断: $\{q_i^{(i)}\}$ 中是否包含 $\{p_i\}$ 中全部的型值点
是,则退出,完成排序过程

否,则在 $\{p_i\} - \{q_i^{(i)}\}$ 中再次选取出一一点作为初始点(当前点) $q_2^{(1)}$,重复步骤(1)中操作;

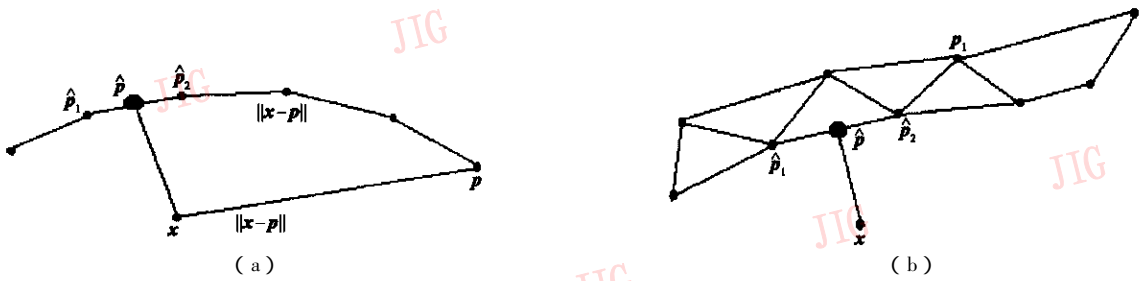


图2 一种新的距离定义

Fig.2 An approximate geodesic distance based on the close-pairs matrix over a proximity graph

(3)判断 $\{p_i\} - \{q_1^{(i)}\} - \{q_2^{(i)}\} - \dots - \{q_t^{(i)}\}$

($t=1, 2, 3, \dots$) 是否等于 N 。

是, 则退出, 完成排序。

否, 则重复步骤(2)。

2.6 重建曲线的生成

重建曲线时, 首先对已经排好序的型值点集 $\{q_1^{(i)}, q_2^{(i)}, \dots, q_n^{(i)}\}$, 每个小点集分别用 B 样条曲线进行拟合, 然后根据每个小点集中的型值点反求 $n+1$ 个控制顶点 $(x_i, y_i, \chi, i=0, 1, \dots, n)$ 来生成 k 次 B 样条曲线 $\alpha(u) = \sum_{i=0}^n \hat{p}_i N_{i,k}(u)$, 其中 $N_{i,k}(u) =$

$$\begin{cases} 1 & \text{if } t_i \leq u \leq t_{i+1} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$N_{i,k}(u) = \frac{(u-t_i)N_{i,k-1}(u)}{t_{i+k}-t_i} + \frac{(t_{i+k+1}-u)N_{i+1,k-1}(u)}{t_{i+k+1}-t_{i+1}} \quad (t_k \leq u \leq t_{n+1})$$

上述操作, 得到的是 n 段曲线片段 $\{C_1, C_2, \dots, C_n\}$, 而最终目的是重建出一条连续的曲线, 采用以下方法将曲线片段连接成一条连续曲线:

(1)再次用距离 d_{geo} 作为评判标准。记 $D(\Sigma_1, \Sigma_2)$ 为 Σ_1 中与 Σ_2 中各个点之间的距离值集合。令 $\Sigma_1 = \{q_1^{(i)}\}, \Sigma_2 = \{q_2^{(i)}, q_3^{(i)}, \dots, q_n^{(i)}\}$ 找到 $p_i = (x_i, y_i) \in \Sigma_1, p_j = (x_j, y_j) \in \{q_1^{(i)}\} \in \Sigma_2$ 使得 $d(p_i, p_j) = \min D(\Sigma_1, \Sigma_2)$ 将 p_i 与 p_j 连接起来。

(2) $\Sigma_2 = \Sigma_2 - \{q_1^{(i)}\}$, 在 Σ_2 中任意选取出一个 $\{q_w^{(i)}, w=1, 2, 3, \dots\}$ 使得 $\Sigma_1 = \{q_w^{(i)}, w=1, 2, 3, \dots\}, \Sigma_2 = \Sigma_2 - \Sigma_1$ 重复步骤(1)。

(3) 终止条件: $\Sigma_2 = \emptyset$ 。

3 应用实例与分析

在内存 256M 的微机平台上, 用 C 语言针对扫描到计算机中的初始扫描离散点云, 实现了本文提出的算法。下面给出用该算法重建曲线的几个

例子:

(1)平面曲线, 点数: 1500。

运行时间: 0.678s。

图3中点为初始无序点集, 曲线为采用本文算法得到的重建曲线。

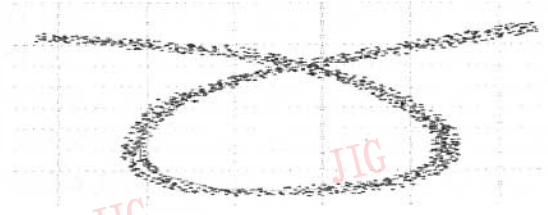


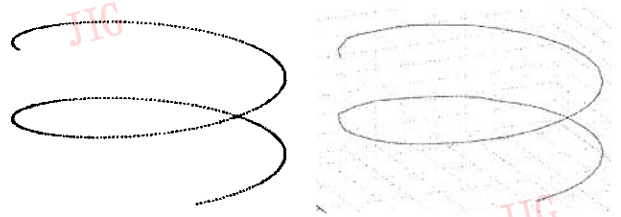
图3 2维重建曲线

Fig.3 2D reconstructed curves

(2)空间曲线, 点数: 5000。

运行时间: 3s。

图4(a)中点线为3维无序点集, 图4(b)中细曲线为用本文算法重建出的曲线。



(a) 3维无序点集

(b) 本文算法重建出的曲线

图4 3维无序点集及其曲线重构(点云厚度小情况)

Fig.4 3D unorganized points (thin point cloud) and its reconstruction curves

(3) 空间曲线, 点数: 10000。点云厚度: 0.25cm。

运行时间: 5s。

如图5所示, 图中, 点为初始空间无序点集; 星点标记为用本文算法计算出的型值点; 曲线为用本



图 5 3 维无序点集及其曲线重构(点云厚度大情况)

Fig. 5 3D unorganized points(thick point cloud) and its reconstruction curves

文算法重建出的曲线。

4 结 论

实例表明,本文的算法不仅可以重建出能准确反映原始点集形状的曲线,而且能很好地解决自交及具有明显角点的情况,特别是当点云数据局部部分发生变化时,由于本文的算法不仅能迅速给予及时调整,而且完全不会影响其他部位的已重构好的曲线,因此时间复杂度没有增加。但对于如何把该算法应用到 3 维立体物体的曲面重构问题,这是今后进一步研究的内容。

参考文献(References)

- 1 Varady T, Martin R R, Cox B J. Reverse engineering of geometric models—an introduction [J]. Computer Aided Design, 1997, **29**(4): 255 ~ 268.
- 2 Singh R, Cherkassky V, Papanikolopoulos N. Self-organizing maps for the skeletonization of sparse shapes [J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 2000, **11**(1): 241 ~ 248.
- 3 Korsters M. Curvature-Dependent parameterization of curves and surfaces [J]. Computer Aided Design, 1991, **23**(8): 569 ~ 578.
- 4 Sarkar B, Menq C-H. Parameter optimization in approximating curves and surfaces to measurement data [J]. Computer Aided Geometric Design, 1991, **8**(4): 267 ~ 290.
- 5 Yang Xun-nian, Wang Guo-zhao. Planar point set fairing and fitting

- by arc splines [J]. Computer Aided Geometric Design, 2001, **18**(1): 35 ~ 43.
- 6 Levin D. The approximation power of moving least-squares [J]. Mathematics of Computation, 1998, **67**(224): 1517 ~ 1531.
- 7 Lee I K. Curve reconstruction from unorganized points [J]. Computer Aided Geometric Design, 2000, **17**(2): 161 ~ 177.
- 8 Kegl B, Linder T. Learning and design of principal curves [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2000, **22**(3): 281 ~ 297.
- 9 Pottmann H, Randrup T. Rotational and helical surface approximation for reverse engineering [J]. Computing, 1998, **60**(4): 307 ~ 322.
- 10 Goshtasby A A. Grouping and parameterizing irregularly spaced points for curve fitting [J]. ACM Transactions on Graphics, 2000, **19**(3): 185 ~ 203.
- 11 Fang L, Gossard D C. Multidimensional curve fitting to unorganized data points by nonlinear minimization [J]. Computer Aided Design, 1995, **27**(1): 48 ~ 58.
- 12 Taubin G, Ronfard R. Implicit simplicial models for adaptive curve reconstruction [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1996, **18**(3): 321 ~ 325.
- 13 Zhong Gang, Yang Xun-nian, Wang Guo-zhao. Planar curve reconstruction from unorganized points through field representation [J]. Journal of Computer-aided Design & Computer Graphics, 2002, **14**(11): 1074 ~ 1079. [钟纲, 杨勋年, 汪国昭. 基于场表示的平面上无序点集曲线重建算法 [J]. 计算辅助设计与图形学学报, 2002, **14**(11): 1074 ~ 1079.]
- 14 Zhong Gang, Yang Xun-nian, Wang Guo-zhao. A tracing algorithm for planar curve reconstruction from a set of unorganized points [J]. Journal of Software, 2002, **13**(11): 2188 ~ 2193. [钟纲, 杨勋年, 汪国昭. 平面上无序点集曲线重建的跟踪算法 [J]. 软件学报, 2002, **13**(11): 2188 ~ 2193.]
- 15 XU Zong-ben, NIE Zan-kan, ZHANG Wen-xiu. Almost sure convergence of genetic algorithms: A martingale approach [J]. Chinese J. Computer, 2002, **25**(8): 785 ~ 792. [徐宗本, 聂赞坎, 张文修. 遗传算法的几乎必然强收敛性—鞅方法 [J]. 计算机学报, 2002, **25**(8): 785 ~ 792.]
- 16 Doob J L. Measure Theory [M]. New York: Springer-Verlag, 1994.
- 17 Jan Klein, Gabriel Zachmann. Point cloud surfaces using geometric proximity graphs [J]. Computers & Graphics, 2004, **28**(1): 839 ~ 850.